13.1 二重积分

2024年5月9日 星期四 14:03

矩形区域上的二重积分的定义(及计算)

规定: 对于矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$，令 $\sigma(D)=(b-a)\times(d-c)$ 称其为D的面积

设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的一个二元函数，作 $[a,b]$ 的划分. $P_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 也写作 $P_x=\{[x_{i-1},x_i]: 1\le i\le n\}$

作 $[c,d]$ 的划分: $P_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_m<d$ 也写作 $P_y=\{[y_{i-1},y_i]: 1\le j\le m\}$

则两个直线族 $x=x_i\ (1\le i<n)$ $y=y_j\ (1\le j<m)$ 把矩形D分割成 $k=nm$ 个小矩形，将这些小矩形编号为 $D_1, D_2, \cdots D_k$. 称 $P=\{D_1,\cdots D_k\}$ 为矩形D的一个划分

也记作 $P=P_x\times P_y$

记 $\|P\|=\max\{$矩形 D_i 的直径(即对角线长度) $1\le i\le k\}$ 称其为P的细度

$\forall 1\le i\le k$，任取 $\xi_i\in D_i$ (称作介点)，作和 $(S(f,P,\{\xi_i\}))=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\sigma(D_i)$

若极限 $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\sigma(D_i)$ 存在，则称f在D上是可积的，并且称积分和的极限.

f在D上的二重积分记作 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ 或 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 或 $\int_D f\,d\sigma$

f 称作被积函数， D称作积分区域

定义: 若 $\exists A\in\mathbb{R}$，使 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 不管分划P如何选取，也不管介点组 $\{\xi_i\}$ 如何选取，只要 $\|P\|<\delta$ 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\sigma(D_i)-A\right|<\varepsilon$$

称 $\lim_{\|P\|\to 0}\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\sigma(D_i)-A\right|$ 存在，且以A为极限

令 $\overline{S}(f,P)=\sup\{S(f,P,\{\xi_i\}): \{\xi_i\}$ 是分划P确定之后的介点组$\}$

—— f关于分划P的达布上和.

令 $\underline{S}(f,P)=\inf\{S(f,P,\{\xi_i\}): \{\xi_i\}$ 是分划P确定之后的介点组$\}$

—— f 关于分划 P 的达布下和.

则 $\underline{S}(f,P) \le S(f,P,\{\xi_i\}) \le \overline{S}(f,P)$

性质1：设P与P'都是矩形D的分划，并且P'是P的加细，则有

$$\underline{S}(f,P) \le \underline{S}(f,P') \le \overline{S}(f,P') \le \overline{S}(f,P)$$

性质2：任给矩形D的两个分划 P_1 与 P_2. 必有 $\underline{S}(f,P_1) \le \overline{S}(f,P_2)$

性质3：$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{k} M_i\,\sigma(D_i)$，其中 $M_i = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in D_i\}$

$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{k} m_i\,\sigma(D_i)$，其中 $m_i = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in D_i\}$

命题：如果f是矩形区域D上的无界函数，则f在D上不可积

可推出 $\underline{\int} f\,d\sigma \le \overline{\int} f\,d\sigma$

并且 $\forall$ D的分划P，有 $\underline{S}(f,P) \le \underline{\int} f\,d\sigma \le \overline{\int} f\,d\sigma \le \overline{S}(f,P)$

$$\underline{S}(f,P) \le \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\sigma(D_i) \le \overline{S}(f,P)$$

定理1：若f是D上的有界函数，则f在D上是可积的 $\Longleftrightarrow$ $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

定理2：若f是D上的有界函数，则 $\underline{\int} f\,d\sigma = \overline{\int} f\,d\sigma \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 分划P，使

$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

定理2 显然

定理1："$\Rightarrow$"，记 $A = \int_D f\,d\sigma$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得对 D的任意分划 $P = \{D_1, D_2, \cdots D_n\}$ 以及分划后的介点组 $\{\xi_i\}$，只要 $\|P\| < \delta$，就有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\sigma(D_i) - A\right| < \varepsilon$

即 $A - \varepsilon/3 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\sigma(D_i) < A + \varepsilon/3$

于是 当 $\|P\| < \delta$ 时，必有 $A - \varepsilon/3 \le \underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P) \le A + \varepsilon/3$

于是 $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

"$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ D 的一分划 $P = \{D_1, D_2, \cdots D_n\}$，使 $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

由定理2，此时 $\overline{\int}_D f\,d\sigma = \underline{\int}_D f\,d\sigma \xlongequal{\text{记为}} A$

令 $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{D_i$ 的长与宽的最小值，$1 \le i \le n\}$

$\forall\, 0 < \delta < \delta_0$. 记 $\mathring{D}_i$ 为 D_i 往中心缩进 δ 的开矩形

令 $K = D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathring{D}_i\right)$，则 $\exists\, 0 < \delta < \delta_0$. 使 $\sigma(K) \left(= \sigma(D) - \sum_{i=1}^{n} \sigma(\mathring{D}_i)\right) < \varepsilon$

任给 D 的一个分划 $P = \{E_1, \cdots E_t\}$ 以及任给分划 P 取定之后的介点组 $\{\xi_i\}$,

任给 D 的一个分割 $P=\{E_1,\cdots E_t\}$ 以及任给分割 P 取定之后的介点组 $\{\xi_i\}$,

设 $\|P\|<\delta$, 往证: $\left|\sum_{i=1}^{t} f(\xi_i)\sigma(E_i)-A\right|<\varepsilon$

注意到 $\underline{S}(f,P)\le\sum_{i=1}^{t} f(\xi_i)\sigma(E_i)\le\overline{S}(f,P)$

$\underline{S}(f,P)\le\underline{\int_D} f\,d\sigma=A=\overline{\int_D} f\,d\sigma\le\overline{S}(f,P)$

所以 $\left|\sum_{i=1}^{t} f(\xi_i)\sigma(E_i)-A\right|\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)$

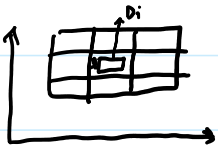
$$=\sum_{i=1}^{t}M_i\sigma(E_i)-\sum_{i=1}^{t}m_i\sigma(E_i)=\sum_{i=1}^{t}(M_i-m_i)\sigma(E_i)$$

$M_i=\sup\{f(\vec{x}):\vec{x}\in E_i\}$, $m_i=\inf\{f(\vec{x}),\vec{x}\in E_i\}$

已有 $\overline{S}(f,P_1)-\underline{S}(f,P_1)<\varepsilon\longrightarrow P_1:\{D_1,\cdots,D_n\}$

令 $\Lambda_1=\{i:E_i\subset K\}$

$\Lambda_2=\{i:E_i\not\subset K\}$



分为两类

① 若 $i\in\Lambda_2$, 则 $\exists\,1\le j\le n$, 使 $E_i\subset D_j$

于是 $\sum_{i\in\Lambda_2}(M_i-m_i)\sigma(E_i)$

$\le\sum_{j=1}^{n}\sum_{i:E_i\subset D_j}(M_i-m_i)\sigma(E_i)$

$\le\sum_{j=1}^{n}\sum_{i:E_i\subset D_j}(\widetilde{M}_i-\widetilde{m}_i)\sigma(E_i)$ 其中 $\widetilde{M}_j=\sup\{f(\vec{x}),\vec{x}\in D_j\}$ $\widetilde{m}_j=\inf\{\cdots\}$

$\le\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{M}_j-\widetilde{m}_j)\sigma(D_j)=\overline{S}(f,P_1)-\underline{S}(f,P_1)<\varepsilon$

② 记 $M_f=\sup\{f(\vec{x}):\vec{x}\in D\}$, $m_f=\inf\{f(\vec{x}),\vec{x}\in D\}$, 则

$\sum_{i\in\Lambda_1}(M_i-m_i)\sigma(E_i)\le(M_f-m_f)\cdot\sigma(E_i)\le(M_f-m_f)\cdot\sigma(K)<(M_f-m_f)\cdot\varepsilon$

零面积集

定义 设 $D\subset\mathbb{R}^2$, 称 D 为零面积集, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 有限个 可换为开 闭矩形 $D_1,D_2,\cdots,D_k$, 使 $D\subset\bigcup_{i=1}^{k}D_i$, 有 $\sum_{i=1}^{k}\sigma(D_i)<\varepsilon$ 都默认为坐标矩形, $[a,b]\times[c,d]$

定理: 设 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$ 是连续曲线, 且 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之中至少有一个关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上是连续可微的, 则集合 $E=\{(x(t),y(t)):t\in[\alpha,\beta]\}$ 是零面积集

定理 设 $\begin{cases} \\ y=y(t) \end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$ 是连续曲线……

连续可微的，则集合 $E=\{(x(t),y(t)):t\in[\alpha,\beta]\}$ 是零面积集

证：不妨设 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是连续可微的

$\forall\varepsilon>0$，由 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，从而一致连续，所以 $\exists\delta>0$，使，$\forall t',t''\in[\alpha,\beta]$，只要

$|t'-t''|<\delta$，就有 $|x(t')-x(t'')|<\varepsilon$，取定 $[\alpha,\beta]$ 的一个划分：$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，使

$\max\{t_i-t_{i-1},1\le i\le n\}<\delta$

$\forall 1\le i\le n$，令 $a_i=\min\{x(t),t\in[t_{i-1},t_i]\}$

$b_i=\max\{x(t),t\in[t_{i-1},t_i]\}$

$c_i=\min\{y(t),t\in[t_{i-1},t_i]\}$

$d_i=\max\{y(t),t\in[t_{i-1},t_i]\}$

则 $\forall t\in[t_{i-1},t_i]$，有 $(x(t),y(t))\in[a_i,b_i]\times[c_i,d_i]$

注意到：$b_i-a_i<\varepsilon$

由 c_i 与 d_i 的定义，$\exists t_i',t_i''\in[t_{i-1},t_i]$，使 $c_i=y(t_i')$ $d_i=y(t_i'')$

从而 $d_i-c_i=y(t_i'')-y(t_i')=y'(\xi_i)\cdot(t_i''-t_i')$

令 $M=\max\{y'(t):t\in[\alpha,\beta]\}$

上式 $\le M|t_i'-t_i''|\le M(t_i-t_{i-1})$

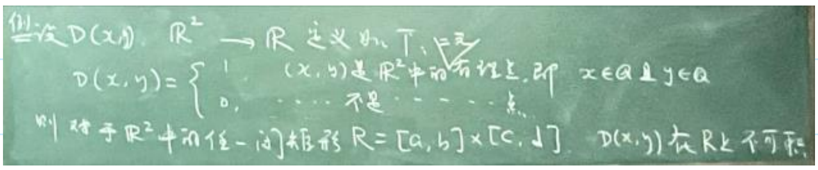
从而 $\sum_{i=1}^{n}\sigma([a_i,b_i]\times[c_i,d_i])=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)(d_i-c_i)\le M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=M(\beta-\alpha)\cdot\varepsilon$

于是由 ε 的任意性，$\sigma(E)=0$

推论1：设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 的图像

$G(f)=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 是零面积集

推论2：有限条光滑曲线的并是零面积集



此时 $\overline{\int_R} f\,d\sigma=\sigma(R)$ $\underline{\int_R} f\,d\sigma=0$ $\Rightarrow$ 不可积

13.2 重积分的性质与计算

2024年5月15日 星期三 18:45

重积分的性质

(1) 线性性

(2) (非负性) 设 f 和 g 都在矩形 D 上可积, 那么

① 若 $f(x)\ge 0$, $\forall x\in D$, 则 $\int_D f\,d\sigma \ge 0$

② 若 $f(x)\ge g(x)$, $\forall x\in D$, 则 $\int_D f\,d\sigma \ge \int_D g\,d\sigma$

重积分的计算

设 f: $D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 若 $\forall x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数

在 $[c,d]$ 上可积, 则可定义 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$, $x\in[a,b]$

又假设 φ 在 $[a,b]$ 上可积. 则可得到如下积分

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

也记作 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$, 类似地可定义 $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$

定理: 设 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 如果对于 $\forall x\in[a,b]$, 函数 $f(x,y)$ 作为 y 的函数

在 $[c,d]$ 上可积, 则累次积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ 必定存在且为 $\int_D f\,d\sigma$

推论: 若 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上为连续函数, 则

$$\int_D f\,d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

分析: 记 $A=\int_D f\,d\sigma$ 则由 f 在 D 上可积, 可知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 使当 D 的分划 $P=P_x\times P_y$ 满足

$\|P\|<\delta_1$ 时, 其中 P_x: $a=x_0<x_1<\cdots<x_s=b$ P_y: $c=y_0<y_1<\cdots<y_t=d$

对任意的 $\xi_{ij}\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(1\le i\le s, 1\le j\le t)$ 都有 $A-\varepsilon<\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^t f(\xi_{ij})\Delta x_i\Delta y_j<A+\varepsilon$

从而 $A-\varepsilon\le\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^t m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^t M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le A+\varepsilon$ (1)

其中 $m_{ij}=\inf\{f(x,y): (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}$

$M_{ij}=\sup\{f(x,y): (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}$

令 $\delta=\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}$, 对 $[a,b]$ 的任意分划 P_x: $a=x_0<x_1<\cdots<x_s=b$, 其中 $\|P_x\|<\delta$

取定 $[c,d]$ 的一个分划 P_y: $c=y_0<y_1<\cdots<y_t=d$, 使得 $\|P_y\|<\delta$

则 $P=P_x\times P_y$ 是 D 的分划, 且 $\|P\|<\sqrt{2}\delta=\delta_1$, 从而 (1)式成立

任取 $\xi_i\subset[x_{i-1},x_i]$, $1\le i\le s$, 往证: $\left|\sum_{i=1}^s\varphi(\xi_i)\Delta x_i-A\right|\le\varepsilon$

而 $\forall\, 1\le i\le s$

$$\varphi(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)\,dy=\sum_{j=1}^t\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy$$

注意到 $\forall\,1\le j\le t$, 有 $f(\xi_i,y)\le M_{ij}$

于是 $\varphi(\xi_i)\le\sum_{j=1}^t M_{ij}\Delta y_j$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^s\varphi(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^t M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le A+\varepsilon$

同理可证: $\sum_{i=1}^s\varphi(\xi_i)\Delta x_i\ge\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^t m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\ge A+\varepsilon$

从而定理成立

Lebesgue 定理 (弱化版本) 设 f 是 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的有界函数, 若 f 的间断点集是零面积集, 则 f 在 D 上可积.

证: 由 f 的间断点集 E 是零面积集, 故 $\forall\varepsilon>0$

$\exists$ 有限个开矩形 $J_1,J_2,\cdots J_m$, 使 $E\subset\bigcup_{j=1}^m J_j$, 且 $\sum_{j=1}^m\sigma(J_j)<\varepsilon$

令 $K=D\setminus\bigcup_{j=1}^m J_j$, 则 K 是有界闭集, 并且 $\forall\vec{x}\in K$, 都有 f 在点 $\vec{x}$ 处连续

断言: 对上述 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使 $\forall\vec{x}\in K$, $\vec{y}\in D$, 只要 $|\vec{x}-\vec{y}|<\delta$, 就有 $|f(\vec{x})-f(\vec{y})|<\varepsilon$

假设断言成立, 任取 D 的一个分划 $P=\{D_1,\cdots,D_n\}$ 使 $\|P\|<\delta$,

令 $\Lambda_1=\{i\in\{1,2,\cdots,n\}: D_i\cap K\ne\emptyset\}$

$\Lambda_2=\{i\in\{1,2,\cdots,n\}: D_i\cap K=\emptyset\}$

$\forall i\in\Lambda_2$, 有 $D_i\subset D\setminus K\subset\bigcup_{j=1}^m J_j$ 从而

$$\sum_{i\in\Lambda_2}w_i\sigma(D_i)\le w\sum_{i\in\Lambda_2}\sigma(D_i)\le w\sum_{j=1}^m\sigma(J_j)<w\cdot\varepsilon$$

其中 $w=\sup_{\vec{x}\in D}f(\vec{x})-\inf_{\vec{x}\in D}f(\vec{x})$

$\forall i\in\Lambda_1$, 有 $D_i\cap K\ne\emptyset$, 任取 $\xi_i\in D_i\cap K$, $\forall\vec{x}',\vec{x}''\in D_i$, 有

$$|f(\vec{x}')-f(\vec{x}'')|\le|f(\vec{x}')-f(\xi)|+|f(\xi)-f(\vec{x}'')|\overset{\text{断言}}{<}2\varepsilon.$$

$\Rightarrow w_i\le 2\varepsilon$

$\Rightarrow\sum_{i\in\Lambda_1}w_i\sigma(D_i)\le 2\varepsilon\,\sigma(D)$

从而 $\sum_{i=1}^n w_i\sigma(D_i)\le\varepsilon(w+2\sigma(D))$

下说明断言: 假设断言不成立, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists\vec{x}\in K$, $\vec{y}\in D$, 使

$|\vec{x}-\vec{y}|<\delta$, 但 $|f(\vec{x})-f(\vec{y})|\ge\varepsilon_0$

取 $\delta_n=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, $\exists S_n\in K$ $\exists t_n\in D$, 使 $|S_n-t_n|<\frac{1}{n}$, 但 $|f(S_n)-f(t_n)|\ge\varepsilon_0$

$\exists\{S_n\}$ 的子列 $\{S_{n_k}\}$, 使 $\{S_{n_k}\}$ 收敛于 K 中的某点 S^*,

又由 $|t_{n_k}-S^*|\le|t_{n_k}-S_{n_k}|+|S_{n_k}-S^*|\Rightarrow t_{n_k}\to S^*$

f 在点 S^* 连续 $f(S_{n_k})\to f(S^*)$ 且 $f(t_{n_k})\to f(S^*)$

从而 $|f(S_{n_k})-f(t_{n_k})|\ge\varepsilon_0$ 矛盾!

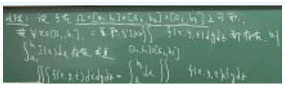
定理: 设函数 f: $D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 有界, 若集合 $E=\{x\in D: f(x)\ne 0\}$ 是一个零面积集, 则 f 在 D 上可积, 并且 $\int_D f\,d\sigma=0$

定理: 设函数 f,g 在 D 上有界, 记集合 $E=\{x\in D: f(x)\ne g(x)\}$ 是一个零面积集, 那么若 f 与 g 之中有一个在 D 上可积, 则另一个也在 D 上可积, 并且 $\int_D f\,d\sigma=\int_D g\,d\sigma$

有界集合上的二重积分

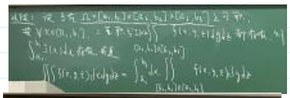
定义: 设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 为有界集合, 函数 f: $E\to\mathbb{R}$, 令

$$f_E(p)=\begin{cases}f(p), & 若\ p\in E\\ 0, & 若\ p\in\mathbb{R}^2\setminus E\end{cases}$$



定义：设$E\subset\mathbb{R}^2$为有界集合，函数$f:E\to\mathbb{R}$，令

$$f_E(p)=\begin{cases}f(p)，若 p\in E\\ 0，若 p\in\mathbb{R}^2\setminus E\end{cases}$$



定义：任取有界的闭矩形$D\supset E$，若函数f_E在D上可积，则称f在E上可积，并称数值$\int_D f_E\,d\sigma$为f在E上的二重积分

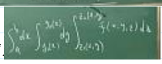
记作 $\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy$ 或 $\iint\limits_E f(x,y)\,d\sigma$ 或 $\iint\limits_E f\,d\sigma$

定理：设$E\subset\mathbb{R}^2$为有界集合　$f:E\to\mathbb{R}$为有界函数

若f的间断点集与∂E都是零面积集，则f在E上可积

（f_E的间断点集$\subset f$的间断点集$\cup\,\partial E$）

性质：(1) 线性性



(2) 积分的集合可加性：设$E_1,E_2\cap\mathbb{R}^2$有界，并且$E_1\cap E_2$为零面积集，

若函数f在E_2和E_3上都可积，则f在$E_1\cup E_2$上可积，

并且$\int_{E_1\cup E_2}=\int_{E_1}f\,d\sigma+\int_{E_2}f\,d\sigma$

（$f_{E_1\cup E_2}=f_{E_1}+f_{E_2}$ 除了在$E_1\cap E_2$上）

(3) 保不等式

定义（面积）：设$E\subset\mathbb{R}^2$为一个有界点集，若常值函数1在E上可积，

则称E是有面积的，称积分$\int_E 1\,d\sigma$为集合E的面积，记为$\sigma(E)$）

定义：任取$E\subset\mathbb{R}^2$，称函数$\chi_E(p)=\begin{cases}1，若 p\in E\\ 0，若 p\notin E\end{cases}$ 为E的特征函数

性质：任取一个包含E的闭矩形D，有

$$\int_D\chi_E\,d\sigma=\int_E 1\,d\sigma=\sigma(E)$$

定理：设$E\subset\mathbb{R}^2$有界，则$\sigma(E)=0\iff E$是一个零面积集

定理：设$E\subset\mathbb{R}^2$有界，则E有面积$\iff\partial E$是一个零面积集

设E为$\mathbb{R}^2$中有面积的有界集合，f在E上可积，把E分成任意有限多个两两不交的有面积的小块$E_i(1\le i\le n)$，记分划$P=\{E_1,\cdots,E_n\}$

定义$\|P\|=\max\{\mathrm{diam}(E_i):1\le i\le n\}$ —— 分划P的细度

固定分划P，$\forall 1\le i\le n$，在E_i中任取ξ_i，作积分和$\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\,\sigma(E_i)$

定理：此时必有$\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\,\sigma(E_i)=\int_E f\,d\sigma$

<u>积分中值定理</u>　设K是由$\mathbb{R}^2$中有限条光滑曲线围成的有界闭区域，

函数$f,g:K\to\mathbb{R}$连续且g在K上不变号

则$\exists\,\xi\in K$，使$\int_K fg\,d\sigma=f(\xi)\int_K g\,d\sigma$

特别地，取$g=1$，有$\xi\in K$，使$\int_K d\sigma=f(\xi)\cdot\sigma(K)$

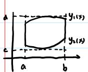
定义：称形如$\{(x,y):y_1(x)\le y\le y_2(x)，a\le x\le b\}$　(3)

的区域为X型区域，其中$y_1(x)$与$y_2(x)$都在$[a,b]$上连续，且

$y_1(x)\le y_2(x)$，$\forall x\in[a,b]$，类似地，可定义Y型区域

定理1：设E由(3)定义，并且满足X型区域的条件，<u>若函数f在E上可积并且$\forall x\in[a,b]$，积分$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy$存在</u>，那么

$$\int_E f\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy\quad(4)$$



证：$c=\min\{y_1(x):x\in[a,b]\}$

$d=\max\{y_2(x):x\in[a,b]\}$

$D=[a,b]\times[c,d]$，则$E\subset D$

由f在E上可积，可得f_E在D上可积，且$\int_E f\,d\sigma=\int_D f_E\,d\sigma$.

$\forall x\in[a,b]$，由于$f_E(x,y)$在$[c,y_1(x)]\,[y_1(x),y_2(x)]\,[y_2(x),d]$上均可积

$$\int_c^d f_E(x,y)\,dy=\int_c^{y_1(x)}*+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}*+\int_{y_2(x)}^{d}*$$

$$=0+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}*+0=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy$$

从而(4)式成立！

定理2：若把定理1中的划线部分换作：函数f在E上连续

则f在E上可积，且(4)式成立

① f在E上可积（∂E为零面积集）

② $\forall x\in[a,b]$，$f(x,y)$关于y在$[y_1(x),y_2(x)]$上连续，从而可积

13.3 二重积分的变量替换

2024年5月16日 星期四 13:27

二重积分：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \xrightarrow[T(\Delta)=D]{\text{令} T\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}(u,v)\in\Delta} \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

引理：设映射 $\varphi:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 是开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个连续可微的映射

并且 $\forall(u,v)\in U$，有 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，$\forall(u_0,v_0)\in U$ $\forall(h,k)\neq 0$ 令 A_{hk} 是以 $(u_0,v_0),(u_0+h,v_0),(u_0+h,v_0+k)\,(u_0,v_0+k)$ 为顶点的矩形，则 $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sigma(\varphi(A_{hk}))}{\sigma(A_{hk})}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ (※)

分析：$\sigma(\varphi(A_{hk}))\approx\|(\varphi(u_0+h,v_0)-\varphi(u_0,v_0))\times(\varphi(u_0,v_0+k)-\varphi(u_0,v_0))\|$ (*)

其中我们规定

$$(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1,y_1,0)\times(x_2,y_2,0)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x_1&y_1&0\\ x_2&y_2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\ x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

注意到 $\varphi(u_0+h,v_0)-\varphi(u_0,v_0)=(x(u_0+h,v_0)-x(u_0,v_0),\ y(u_0+h,v_0)-y(u_0,v_0))$

$\varphi(u_0,v_0+k)-\varphi(u_0,v_0)=(x(u_0,v_0+k)-x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0+k)-y(u_0,v_0))$

且
$$\left.\begin{aligned}x(u_0+h,v_0)-x(u_0,v_0)&=\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,h+o(h)\\ y(u_0+h,v_0)-y(u_0,v_0)&=\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,h+o(h)\end{aligned}\right\}\text{当 } h\to 0$$
$$\left.\begin{aligned}x(u_0,v_0+k)-x(u_0,v_0)&=\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,k+o(k)\\ x(u_0,v_0+k)-x(u_0,v_0)&=\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,k+o(k)\end{aligned}\right\}\text{当 } k\to 0$$

从而 (*) $=\left\|hk\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}\right\|=hk\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}$ 当 $(h,k)\to 0$ 时

从而 (※) 式成立

设映射 $\varphi:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 是开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个连续可微的映射

并且 $\forall(u,v)\in U$，有 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，设 $\Delta\subset U$ 是有限条光滑曲线所围成的闭区域

并且 φ 是 Δ 上的单射，设二元函数 f 在 $D=\varphi(\Delta)$ 上连续，则

设二元函数 f 在 $D=\varphi(\Delta)$ 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

二重积分的变量替换公式

用矩形 R 覆盖 Δ，用平行于 u 轴与 v 轴的直线段分割 R

用矩形R覆盖Δ，用平行于u轴与v轴的直线段分割R

$u_0 < u_1 < \cdots < u_n$ ， $v_0 < v_1 < \cdots < v_m$

只关注完全包含于Δ中的小矩形Δi，$i=1,2,\cdots,k$，任取$(u_i,v_i)\in\Delta i$
记 $x_i = x(u_i,v_i)$
$y_i = y(u_i,v_i)$

注意到 (左) $\approx \sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma(D_i)$

$$\approx \sum_{i=1}^{k} f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i))\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\cdot\sigma(\Delta i) \approx \text{右}$$

用极坐标方法求二重积分

当被积区域D为圆域或圆域的一部分，或者被积函数是形如$f(x^2+y^2)$的函数，可用极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty \quad \theta\in[0,2\pi]$$

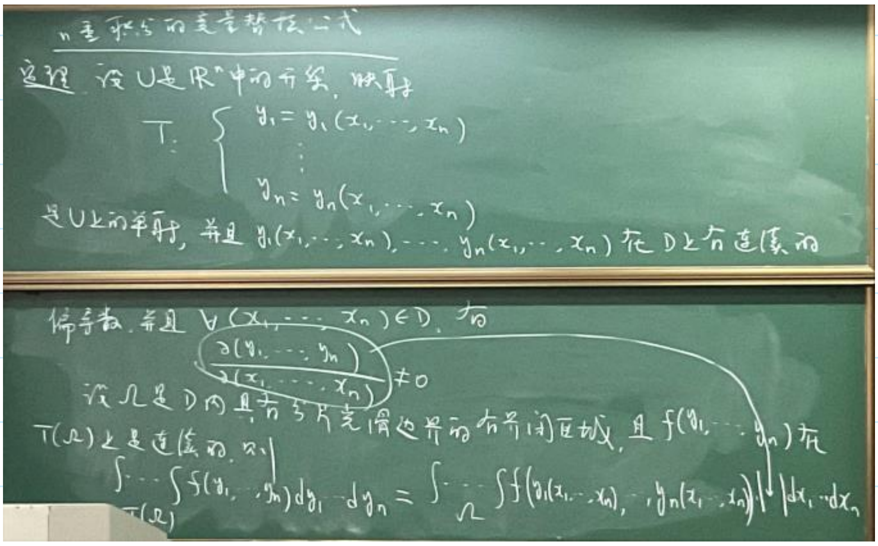
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_{D_R} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Delta R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

若D为一般的区域，则取充分大的$R>0$，使$D\subset D_R$

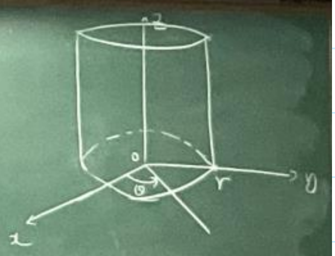
令 $\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in D_R\setminus D \end{cases}$

则 $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_R} \hat{f}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta R} \hat{f}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \iint_{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$



1 柱坐标变换（柱面坐标变换）

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$



$z=$常数 $\longleftrightarrow$ 垂直于 z 轴的平面

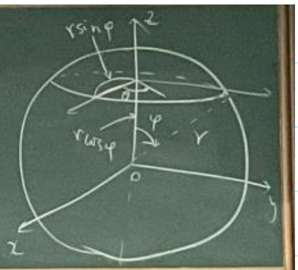
$r=$常数 $\longleftrightarrow$ 以 z 轴为中心轴的圆柱面

$\theta=$常数 $\longleftrightarrow$ 过 z 轴的半平面

此时 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & 0 \\ y_r & y_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$

2 球坐标变换（球面坐标变换）

$$\begin{cases} x = \underline{r\sin\varphi}\cos\theta \\ y = \underline{r\sin\varphi}\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array}$$



$r=$常数 $\longleftrightarrow$ 以原点为中心的球面

$\varphi=$常数 $\longleftrightarrow$ 以原点为顶点的半圆锥面

$\theta=$常数 $\longleftrightarrow$ 过 z 轴的半平面.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\varphi \cdot r^2\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + r\sin\varphi\cdot r\sin^2\varphi\cdot 1 = \boxed{r^2\sin\varphi}$$